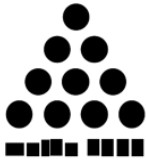




**Mathematisch fundierte Analysen  
als Grundlage  
für didaktische Entscheidungen**



<http://www.tu-dortmund.de/mathe2000>

**Beispiel 1: Einführung der Multiplikation**

Brian Butterworth, The Mathematical Brain

S. 193 ff. „Signor Bellini“

[http://www.multiplication.com/  
basics/teach1.htm](http://www.multiplication.com/basics/teach1.htm)

Jee-Hyun Park, Terezinha Nunes: The development of the concept of multiplication.  
Cognitive Development 16 (2001), 763 - 773

Empirischer Vergleich zwischen Multiplikation als „repeated addition“ und Multiplikation als „schema of correspondences“ („invariant relation between two quantities“)

Lineare Funktion

## **K. Devlin**

### **Kolumnen:**

It ain't no repeated addition  
It's still not repeated addition

Thesen von Devlin:

1. Multiplikation beruht auf „scaling“.
2. Begriffe sollten von Anfang „richtig“ eingeführt werden.

Interessante Diskussion unter  
[http://scienceblogs.com/goodmath/2008/07/teaching\\_multiplication\\_is\\_it.php](http://scienceblogs.com/goodmath/2008/07/teaching_multiplication_is_it.php)

### **Peano Axiome für die Multiplikation:**

$$1 \cdot n = n$$

$$m' \cdot n = m \cdot n + n$$

### **Peano Axiome für die Addition:**

$$n + 1 = n'$$

$$n + m' = (n + m)'$$

## **Ansatz der deutschsprachigen Mathematikdidaktik:**

Arnold Fricke: Operativer Rechenunterricht auf der Grundlage von J. Piaget / H.Aebli (ab 1955)

Darstellungsmittel für  
Einspluseins und  
Einmalmaleins:  
Cuisenaire-Stäbe



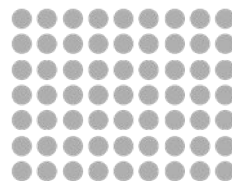
Kennzeichnung der leichten Aufgaben  
1mal..., 2mal..., 5mal... und 10mal...  
als Kernaufgaben und Ableitung der anderen  
Aufgaben mit Hilfe des Distributivgesetzes

zurück zu „Signor Bellini“

Heinrich Winter:

Forderung nach algebraischer Durchdringung  
der Arithmetik (explizit ab 1985)

Darstellungsmittel für die Multiplikation:  
rechteckige Punktfelder



(empfohlen auch von R. Penrose in „Shadows of the Mind“)

### Grundideen der Multiplikation

– Im Bereich der natürlichen Zahlen ist die Multiplikation  
eine verkürzte Addition (nicht „repeated addition“)

– Rechengesetze

• Kommutativgesetz  $a \cdot b = b \cdot a$

• Assoziativgesetz  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

• Distributivgesetz  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$(a + b) \cdot (c + d) =$$

$$a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Entscheidender Vorteil von Punktfeldern: Operative Erfassung und Nutzung *aller* Rechengesetze

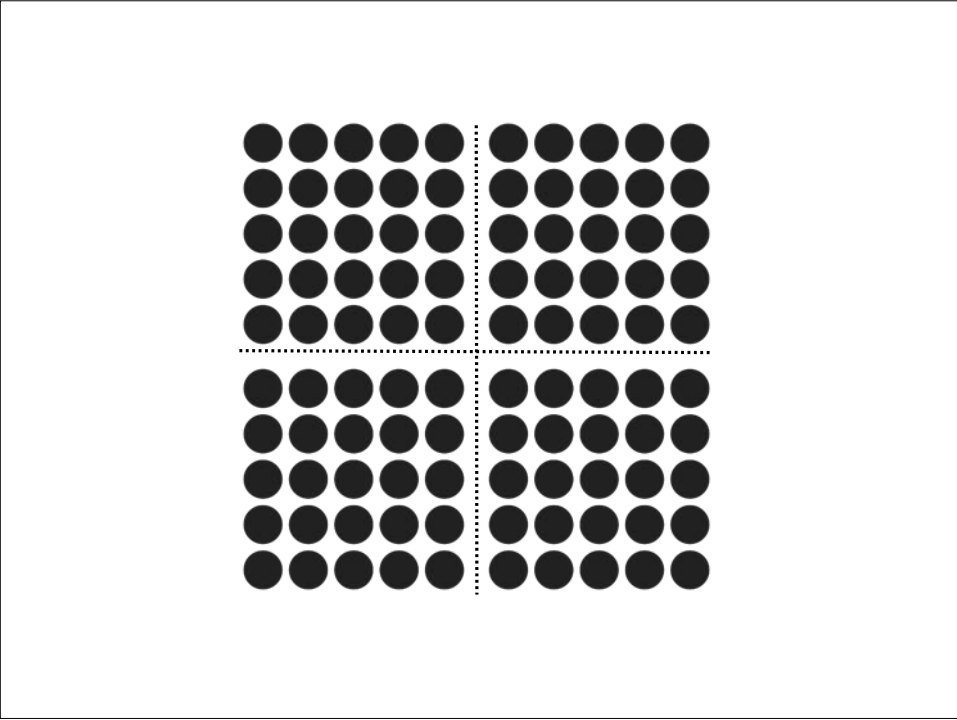
$$4 + 4 + 4 \quad \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array} \quad 3 + 3 + 3 + 3$$

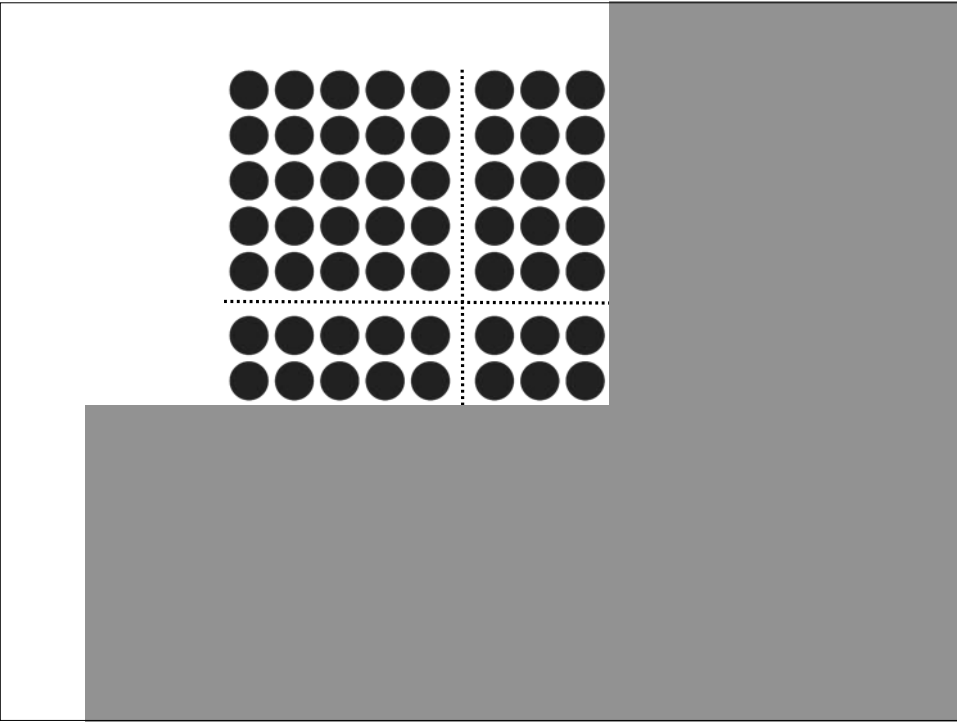
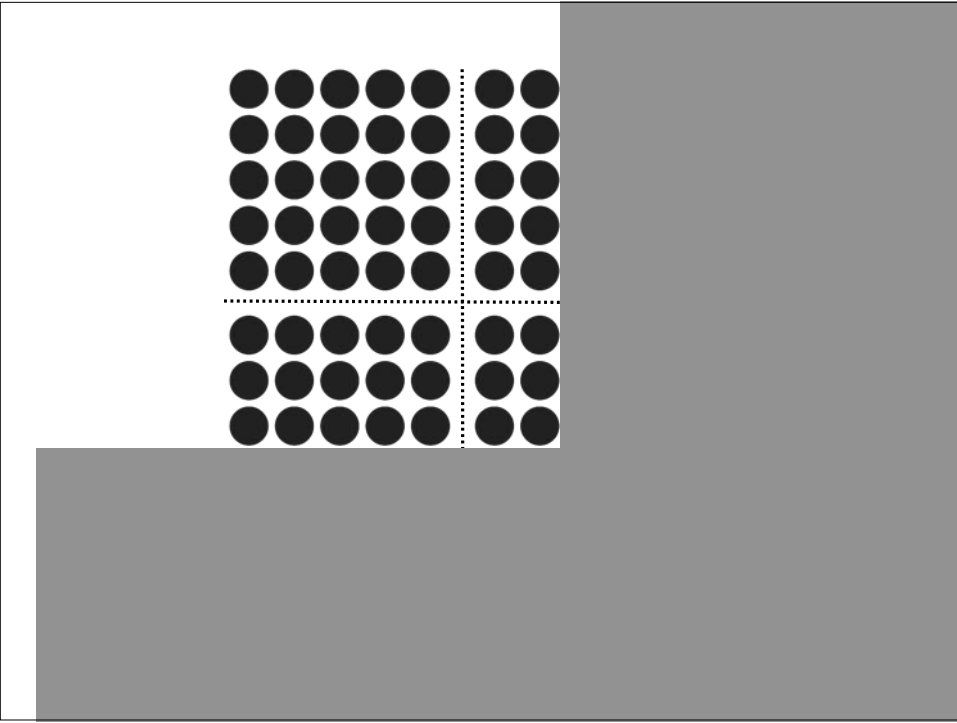
$$3 \cdot 4 \quad \quad \quad 4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \quad (2 \cdot 4) \cdot 3 = 2 \cdot (4 \cdot 3)$$

$$\begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

$$7 \cdot 9 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 \quad 7 \cdot 9 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3$$





**Was die Forderung nach Fortsetzbarkeit  
anbelangt:**

Die Rechengesetze bleiben bei der  
Zahlbereichserweiterung erhalten  
(Permanenzprinzip von Hankel).

Punktfelder sind eine Grundlage für das Malkreuz  
und das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen.

Punktfelder sind fortsetzbar zu Rechtecken, der  
Standarddarstellung der Multiplikation, die bis zur  
Integralrechnung reicht.

Anmerkung:

Aus dem Assoziativ- und Distributivgesetz folgt, dass die  
auf  $\mathbf{R}$  definierte Abbildung  $x \rightarrow a \cdot x$  für jedes  $a \in \mathbf{R}$  eine  
lineare Funktion ist (Grundlage des Dreisatz).

**Beispiel 2: Halbschriftliche Subtraktion im  
Hunderterraum**

**Strategie:** Zehner minus Zehner, Einer minus  
Einer

$$\underline{78 - 25 =}$$

**Beispiel 2: Halbschriftliche Subtraktion im Hunderterraum**

**Strategie:** Zehner minus Zehner, Einer minus Einer

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

**Beispiel 2: Halbschriftliche Subtraktion im Hunderterraum**

**Strategie:** Zehner minus Zehner, Einer minus Einer

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = 53 \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

**Beispiel 2: Halbschriftliche Subtraktion im Hunderterraum**

**Strategie:** Zehner minus Zehner, Einer minus Einer

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = 53 \\ 70 - 20 = 50 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

$$\underline{75 - 28 =}$$

**Beispiel 2: Halbschriftliche Subtraktion im Hunderterraum**

**Strategie:** Zehner minus Zehner, Einer minus Einer

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = 53 \\ 70 - 20 = 50 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = -3 \end{array}$$

## Beispiel 2: Halbschriftliche Subtraktion im Hunderterraum

**Strategie:** Zehner minus Zehner, Einer minus Einer

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = 53 \\ 70 - 20 = 50 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 - 28 = 47 \\ 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = -3 \end{array}$$

Flucht nach vorne oder Flucht nach hinten?

Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.

Georg Cantor

Die Nutzung verschiedener Rechenwege ist von der Mathematik aus **geboden**.

6.5.77

A boy who answers the question:  
 "how much is  $7 - 3$ "  
 with  $4$   
 is not a genius when his age is ~~7~~ 7.

When this boy answers the question:  
 "how much is  $3 - 7$ "  
 with these are 4 numbers  
 he shows some intelligence, but still is  
 not a genius at the age of ~~7~~ 7.

The tragic of our school-education is,  
 that this boy at the age of 77 may have  
~~no~~ difficulty with the concept of negative numbers.

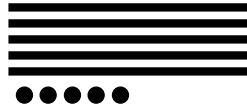
The tragic of his teacher is that he  
 missed 4 years of the boy's development!

*Sybe van der Meulen*  
 Sybe van der Meulen

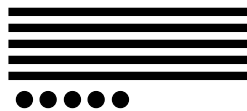
Sybe van der Meulen

$75 - 28 =$

$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 \\ 5 - 8 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 \\ 5 - 8 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 \\ 5 - 8 \end{array}$$



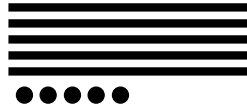
$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 \\ 5 - 8 \end{array}$$



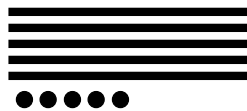
$$\begin{array}{r} 75 - 28 = 47 \\ \hline 70 - 20 \\ 5 - 8 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 = 50 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = -3 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 75 - 28 = 47 \\ 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = -3 \end{array}$$



Ist die Einführung der Strategie „Zehner minus Zehner, Einer minus Einer“ empirisch entscheidbar?

Rückmeldung aus der Praxis

### Hilfreiche Gegenüberstellung:

$$\begin{array}{r} 78 - 25 = 53 \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 75 - 28 = 47 \\ \hline 70 - 20 = 50 \\ 5 - 8 = -3 \end{array}$$

Kollektive Unterrichtsexperimente

### Didaktische Analysen berücksichtigen

1. die epistemologische Struktur mathematischer Inhalte und Prozesse
2. das Vorwissen der Lernenden und die ihnen jeweils zur Verfügung stehenden Mittel
3. die Schlüssigkeit des Curriculums

### Beispiel 3: Schriftliche Subtraktion

Abziehverfahren oder Ergänzungsverfahren?

Ergänzungsverfahren:

$$\begin{array}{r} 821 \\ -128 \\ \hline 693 \end{array}$$

### Beispiel 3: Schriftliche Subtraktion

Abziehverfahren oder Ergänzungsverfahren

Ergänzungsverfahren:

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

Abziehverfahren:

$$\begin{array}{r} \phantom{0}12 \\ 6\cancel{2}14 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

Entwicklung in Deutschland:

Ab 1957 Ergänzungsverfahren allgemein verbindlich

Ab 2000 in einigen Bundesländern (u.A. Bayern)

Abziehverfahren verbindlich, in anderen

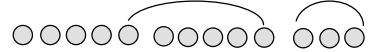
Bundesländern Verfahren freigegeben

Argumente der Befürworter des Abziehverfahrens:

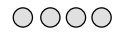
- Einfacher zu verstehen, anschaulich zu begründen
- Kinder tendieren spontan zum Abziehverfahren (wie durch empirische Untersuchungen belegt)
- Beim Ergänzungsverfahren wird nicht subtrahiert (sondern addiert).

## **Didaktische Analyse**

1. Es gibt zwei Formen der Subtraktion:  
– Abziehen (Wegnehmen „von rechts“)

$$13 - 9$$


1. Es gibt zwei Formen der Subtraktion:  
– Abziehen (Wegnehmen „von rechts“)

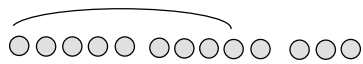
$$13 - 9$$


1. Es gibt zwei Formen der Subtraktion:

– Abziehen (Wegnehmen „von rechts“)

– Ergänzen (Wegnehmen „von links“)

$$13 - 9$$



1. Es gibt zwei Formen der Subtraktion:

– Abziehen (Wegnehmen „von rechts“)

– Ergänzen (Wegnehmen „von links“)

$$13 - 9$$



2. Das Ergänzungsverfahren kann mit Hilfe der Funktion von Zählern sehr einfach und verständlich begründet werden.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

H	Z	E
2	5	8

2. Das Ergänzungsverfahren kann mit Hilfe der Funktion von Zählern sehr einfach und verständlich begründet werden.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

H	Z	E
2	6	4

2. Das Ergänzungsverfahren kann mit Hilfe der Funktion von Zählern sehr einfach und verständlich begründet werden.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

H	Z	E
2	6	4

2. Das Ergänzungsverfahren kann mit Hilfe der Funktion von Zählern sehr einfach und verständlich begründet werden.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

H	Z	E
3	3	4

2. Das Ergänzungsverfahren kann mit Hilfe der Funktion von Zählern sehr einfach und verständlich begründet werden.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

H	Z	E
3	3	4

2. Das Ergänzungsverfahren kann mit Hilfe der Funktion von Zählern sehr einfach und verständlich begründet werden.

$$\begin{array}{r} 734 \\ -258 \\ \hline 476 \end{array}$$

H	Z	E
7	3	4

3. Die spontane Präferenz von Kindern (und vielen Lehrpersonen) ist zumindest z.T. eine Folge der Vernachlässigung des Ergänzens als zweitem Aspekt der Subtraktion.

**Gegenüberstellung der Verfahren hinsichtlich folgender Kriterien:**

- Rechenaufwand (Effizienz)
- Aufwand bei der Notation
- Erforderliche Kopfrechenkenntnisse
- Stabilität bei Veränderungen der Aufgabe
- Eignung für Begründungen
- Nutzen für den weiteren Unterricht

**Professionelle didaktische Analysen berücksichtigen**

1. die epistemologische Struktur mathematischer Inhalte und Prozesse
2. das Vorwissen der Lernenden und die ihnen jeweils zur Verfügung stehenden Mittel
3. die Schlüssigkeit des Curriculums

**Professionelle didaktische Analysen berücksichtigen**

1. die epistemologische Struktur mathematischer Inhalte und Prozesse
2. das Vorwissen der Lernenden und die ihnen jeweils zur Verfügung stehenden Mittel
3. die Schlüssigkeit des Curriculums

**Didaktische Analysen sind eine empirische Forschung eigener Art.**

**Didaktische Analysen liefern die effektivsten Anleitungen für das Design mathematisch substantieller Lernumgebungen und für unterrichtliches Handeln.**